

# ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ И АЭРОУПРУГОСТИ

А. Н. Гильманов

*Казанский государственный энергетический институт,  
Институт механики и машиностроения КНЦ РАН  
gilmanov@sci.kcn.ru*

**1. Введение.** В основу данного доклада положены работы [1–5]. Рассматриваются методы решения уравнений газовой динамики применительно к задачам взаимодействия газа с деформируемыми твердыми телами. В последнее время интенсивно развиваются так называемые смешанные лагранжево–эйлеровы методы. Они объединяют положительные качества эйлерова и лагранжева подходов: наряду с тем, что допускаются сильные искажения среды, можно следить за контактными подвижными поверхностями, что важно при решении задач аэроупругости. Часто в задачах аэродинамики и аэроупругости необходимым бывает учет вязкостных свойств газа, что приводит к сильно неоднородному течению, характеризующемуся разномасштабной структурой потока. При больших числах Рейнольдса и Маха эти различия могут достигать нескольких порядков. Указанные физические свойства исследуемых явлений предъявляют достаточно жесткие требования к численным методам. Прежде всего, это необходимость использования малых пространственных шагов сетки при больших числах Рейнольдса. При этом становится желательным применение динамически адаптивных сеток, позволяющих локально улучшать решение.

**2. Математическая постановка задачи взаимодействия.** В качестве препятствий, с которыми взаимодействует поток газа, могут быть жесткие тела произвольной конфигурации, тела, изменяющие свою форму по заданному закону, а также деформируемые под действием аэродинамического напора.

В задачах аэроупругости удобно пользоваться криволинейными координатами, которые в общем случае должны изменяться во времени. Они могут быть заданы следующими соотношениями

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(t, x, y), \quad \eta = \eta(t, x, y).$$

Система уравнений Навье–Стокса, записанная относительно кри-

волинейных координат  $(\xi, \eta)$ , имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \hat{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \hat{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial \eta} &= \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial \hat{G}}{\partial \xi} + \frac{\partial \hat{H}}{\partial \eta} \right], \\ \hat{E} &= \frac{\xi_t}{J} Q + \frac{\xi_x}{J} E + \frac{\xi_y}{J} F, \quad \hat{F} = \frac{\eta_t}{J} Q + \frac{\eta_x}{J} E + \frac{\eta_y}{J} F, \\ \hat{G} &= \frac{\xi_x}{J} G + \frac{\xi_y}{J} H, \quad \hat{H} = \frac{\eta_x}{J} G + \frac{\eta_y}{J} H.\end{aligned}$$

Здесь  $Q = [\rho, \rho u, \rho v, e]^T$  – вектор состояния течения;  $E, F$  – векторы невязкого газодинамического потока;  $G, H$  – векторы вязкого потока

$$\begin{aligned}E(Q) &= [\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (e+p)u]^T, \\ G(Q) &= [0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + v\tau_{xy} - q_x]^T, \\ F(Q) &= [\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (e+p)v]^T, \\ H(Q) &= [0, \tau_{xy}, \tau_{yy}, u\tau_{xy} + v\tau_{yy} - q_y]^T.\end{aligned}$$

Уравнение переноса энергии за счет теплопроводности используется в виде закона Фурье

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x}, \quad q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y}.$$

Здесь  $t$  – время;  $\rho$  – плотность;  $u, v$  – проекции вектора скорости на оси  $Ox$  и  $Oy$  соответственно;  $e = \rho[\varepsilon + (u^2 + v^2)/2]$  – полная энергия, отнесенная к единице объема;  $p$  – давление;  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия;  $T$  – температура;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $k$  – коэффициент теплопроводности,  $\tau_{xx}$  – компоненты тензора вязких напряжений. Уравнение состояния замыкает систему уравнений газовой динамики

$$p = \rho RT,$$

где  $R$  – газовая постоянная. Зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от термодинамических величин используется в виде закона Сазерленда. Для определения коэффициента теплопроводности по известному коэффициенту динамической вязкости  $\mu$  используется число Прандтля

$$Pr = C_p \frac{\mu}{k}.$$

При рассмотрении задач обтекания одним из краевых условий является задание невозмущенного потока

$$\vec{u} = \vec{u}_\infty, \quad \rho = \rho_\infty, \quad p = p_\infty.$$

На поверхности обтекаемого препятствия, когда границей является непроницаемая подвижная стенка, выполняется условие прилипания, состоящее в равенстве скоростей стенки и газа

$$\vec{u} = \vec{u}_w,$$

где  $\vec{u}_w$  – скорость стенки. Для температуры обычно принимают либо условие изотермической стенки

$$T = T_w,$$

либо условие отсутствия теплопередачи

$$\partial T / \partial n = 0.$$

Здесь  $T_w$  – температура стенки,  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности стенки. При решении нестационарных задач начальные условия представляют собой задание вектора состояния

$$Q(0, \vec{r}) = [\rho_0, \rho_0 u_0, \rho_0 v_0, e_0]^T.$$

В качестве упругой части используются уравнения движения осесимметричного парашюта, полученные на основе известных гипотез Х.А.Рахматулина [6]:

$$\gamma \frac{\partial^2 x_w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s}(T \cos \theta) + \frac{2\pi}{N} \Delta p x_w \sin \theta,$$

$$\gamma \frac{\partial^2 y_w}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial s}(T \sin \theta) + \frac{2\pi}{N} \Delta p x_w \cos \theta,$$

где  $x_w, y_w$  – координаты срединной поверхности оболочки,  $\Delta p$  – перепад давления на поверхности контакта оболочки с газом,  $\theta$  – угол между касательной к срединной поверхности оболочки и осью  $Ox$ ,  $\gamma(s) = \gamma(s_0)/\lambda_1$  – масса единицы длины ленты каркаса и прилегающей к ней ткани,  $\gamma(s_0) = \gamma_0 + 2\pi\mu_0 s_0/N$ ,  $T = E_p(\lambda_1 - 1)$  – усилие в меридианальном направлении,  $E_p$  – приведенный модуль

упругости,  $N$  – число строп,  $s_0, \gamma_0, \mu_0$  – соответственно элемент длины оболочки, масса единицы длины каркаса, масса единицы поверхности ткани в недеформированном состоянии.

В задачах взаимодействия газа с деформируемыми телами на контактных поверхностях необходимо выполнять кинематические и динамические граничные условия. В качестве уравнений газовой динамики принимается модель идеального нетеплопроводного газа. Для идеального газа кинематическим условием на непроницаемых границах является условие непротекания

$$(\vec{u} - d\vec{r}_w/dt) \cdot \vec{n} = 0.$$

Динамические граничные условия представляют собой нагрузки в виде распределения давлений, действующих на поверхности оболочки со стороны газа

$$\Delta p = p^+ - p^-.$$

Здесь  $\vec{r}_w = (x_w, y_w)$  – вектор срединной поверхности оболочки,  $p^+, p^-$  – давление с двух сторон поверхности оболочки.

**3. Методы решения.** В созданном методе, предназначенном для решения задач взаимодействия потока газа с подвижными или деформируемыми препятствиями, используется подход, включающий в себя положительные свойства смешанных эйлерово-лагранжевых методов и возможность использования в расчетах независимых разностных сеток. Он основан на произвольном лагранжево-эйлеровом методе [7], методе консервативной интерполяции [8] и алгоритме построения конечно-разностных сеток в зависимости от принятой препятствием формы. Рассматриваемый подход позволяет исследовать нестационарные процессы взаимодействия потока газа с деформируемыми телами в рамках модели невязкого газа и мягких изотропных оболочек.

При построении конечно-разностной сетки, адаптирующейся к особенностям физического решения, используется подход, который, по существу, основан на идее “эквираспределения”: произведение шага сетки в физическом пространстве и некоторым образом выбранной весовой функции должно оставаться постоянным. Используемый способ построения адаптивных сеток состоит в перемещении координат узлов вдоль одного ( $O\xi$ ), а затем другого ( $O\eta$ ) направления. В качестве подхода, управляю-

щего перемещением узлов, применяется принцип разбиения кривой  $f(x_k, l, y_k, l)|_{l=l_0}$  или  $f(x_k, l, y_k, l)|_{k=k_0}$  на отрезки равной длины (рис. 1).

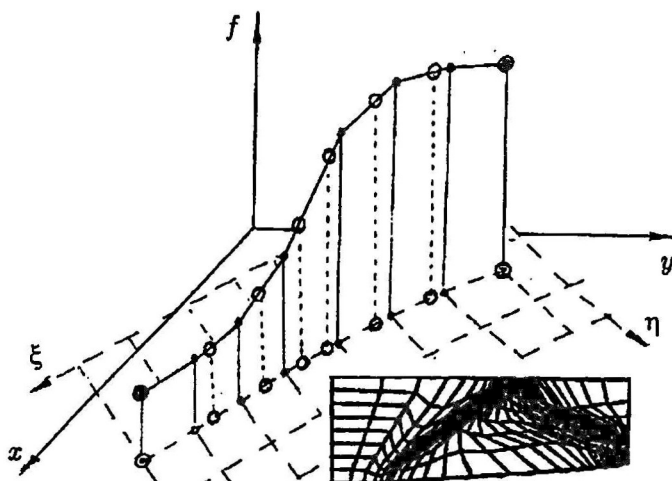


Рис. 1. Адаптивно-подвижные сетки

В те зоны расчетной области, где наблюдаются значительные изменения переменных газового потока, методы адаптивно-встраивающихся сеток предполагают "встраивание" дополнительных ячеек [9]. Рассматриваемый подход позволяет покрыть расчетную область такой сеткой, которая приводит к равномерному распределению градиентов газового потока (можно условно говорить о равномерной ошибке) во всей расчетной области. Ячейки начальной сетки называются ячейками 1-го уровня. Дополнительные ячейки 2-го уровня создаются путем разбиения исходной ячейки, в которой требуется повысить точность, на четыре более мелкие. Над вновь созданными могут быть построены ячейки еще более высокого 3-го уровня и так далее.

Для проведения расчетов на адаптивно-встраивающихся сетках требуется специальная организация структуры данных. Для адаптивно-встраивающихся, которые не являются регулярными, отношения связи между ячейками более сложные: каждая из сторон рассматриваемой ячейки может граничить с различным чис-

лом ячеек разных уровней. И более того, в нестационарных задачах это окружение может меняться: ячейки могут то уничтожаться, то создаваться в соответствии с выбранным критерием. В настоящем алгоритме используются следующие дополнительные указатели для каждой ячейки  $i$  с номером уровня  $n_i$  (рис. 2): а)  $il, ir, ib, it$  – указатели на соседние ячейки своего уровня  $n_i$ , расположенные соответственно слева, справа, снизу и сверху; б)  $i1, i2, i3, i4$  – указатели на ячейки более высокого уровня ( $n_i + 1$ ), созданные над данной ячейкой; в)  $ix$  – указатель на ячейку более низкого уровня ( $n_i - 1$ ), в которой находится рассматриваемая ячейка; д)  $n_i$  – номер уровня данной ячейки.

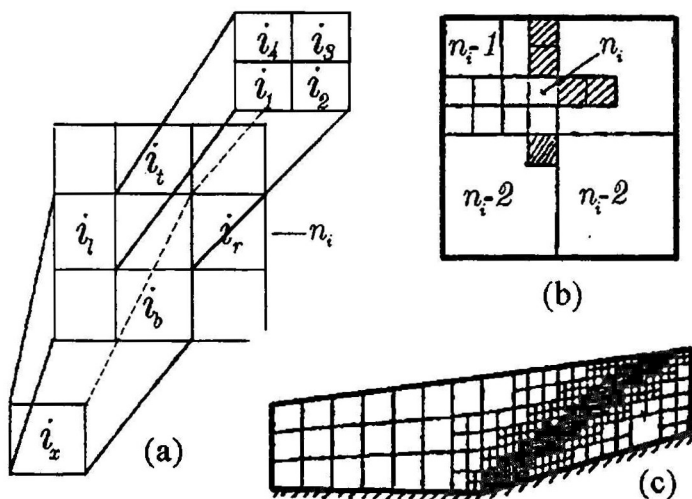


Рис. 2. Адаптивно-встраивающиеся сетки

В рассматриваемой работе для исследования задач с разно-масштабной структурой потока используется конечно-разностная схема TVD 2-го порядка точности [10]. Эти схемы обладают несомненными преимуществами по сравнению со многими традиционными схемами с “искусственной” вязкостью. Во-первых, они имеют высокие разрешающие свойства, то есть зоны перехода в области скачков узки и составляют не более 2–4 ячеек. И второе достоинство этих схем состоит в том, что они не допускают появления нефизических осцилляций в областях разрывов.

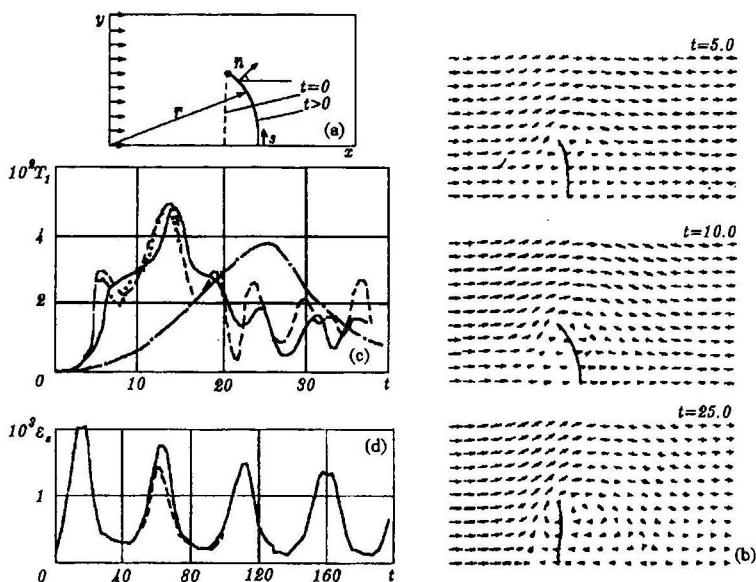


Рис. 3. Мембрана в потоке газа

#### 4. Примеры решения задач аэроупругости.

Задача о нелинейных колебаниях круговой эластичной мембраны, взаимодействующей с дозвуковым потоком газа. Осесимметричная мембрана, закрепленная по внешней кромке, вносится в дозвуковой поток газа (рис. 3,а). Представление о характере нестационарного взаимодействия мембраны в течение одного полупериода колебаний можно получить из рис. 3,б, где построены направления и величины скорости газа в узлах разностной сетки. Для передачи особенностей движения оболочки использовалась подвижная система координат, одна из координатных поверхностей которой совпадала с поверхностью препятствия в каждый момент времени. В соответствии с алгоритмом методики, решение задачи взаимодействия осуществлялось последовательным продвижением оболочки и газа на новый временной слой.

Усилие  $T_1$  в центральной точке мембраны в зависимости от времени приведены на рис. 3,с. Штрихпунктирная линия представляет траекторию той же точки мембраны, перемещающейся под действием мгновенно приложенного постоянного перепада

да давления, равного давлению торможения набегающего потока  $\Delta p_0 = \rho_\infty v_\infty^2 / 2$ . На рис. 3,d показана динамика изменения полной энергии оболочки. Газ, раздувая мембрану, совершает работу, которая идет на увеличение ее энергии. При обратном движении оболочки эта энергия возвращается в газ и так далее. Колебания являются нелинейными – острая верхняя и сильно растянутая нижняя часть кривой. Физически это означает, что процессы перекачки энергии от газа к оболочке и обратно протекают быстрее по сравнению со временем, в течение которого она находится в состоянии, близком к недеформированному.

Анализ результатов счета показал, что напряженно-деформированное состояние оболочки, находящейся в потоке газа, и оболочки, перемещающейся в поле постоянного перепада давления, существенно отличаются, то есть пренебрежение эффектами взаимодействия приводит к качественно другим результатам.

*Раскрытие осесимметричного парашюта в потоке газа.* При численном изучении раскрытия парашюта в газе в данной работе предполагается, что в начальный момент времени  $t=0$  парашют имеет форму цилиндра со сферическим закруглением и мгновенно вносится в сверхзвуковой поток. В результате этого происходит сильный газодинамический удар, ведущий к резким изменениям параметров оболочки, ее формы, что в свою очередь оказывает влияние на характеристики потока газа.

На рис. 4,a-b приведены для сверхзвукового режима течения газа с  $M_\infty = 3$  соответственно связанные с поверхностью купола парашюта сетки и линии равных плотностей в указанные моменты времени. Значительные формоизменения оболочки ведут к сильному изменению разностных сеток во время счета.

Проведенный сравнительный анализ данных задачи взаимодействия с результатами раскрытия парашюта при заданных законах нагружения показал, что различия по ряду параметров могут быть значительными. Следовательно, для получения достоверной и точной информации о происходящих процессах необходимо решать задачу взаимодействия.

*Торможение сверхзвукового потока газа в модельном воздушозаборнике.* Расчеты с использованием двумерных динамически адаптивно-встраивающихся сеток приведены на рис. 5 для задачи торможения сверхзвукового потока невязкого (слева) и вязкого (справа) газа в модельном воздушозаборнике. Для наглядности ре-



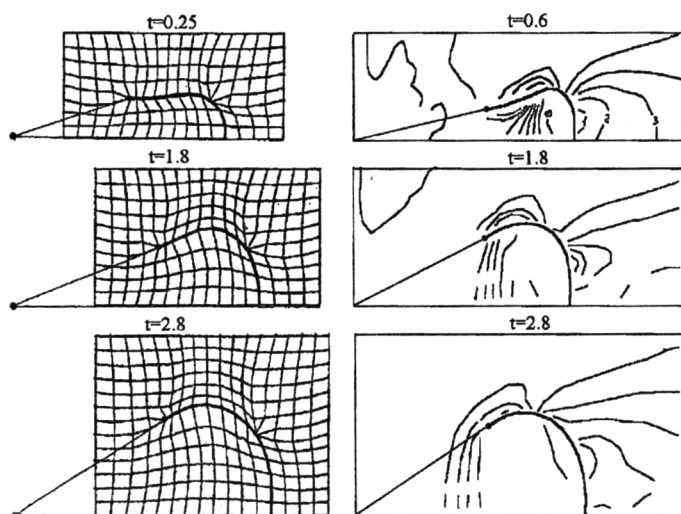


Рис. 4. Раскрытие парашюта в сверхзвуковом потоке газа

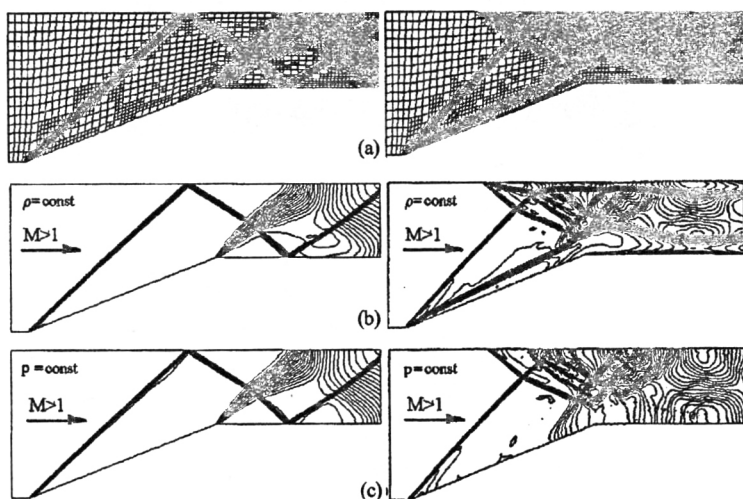


Рис. 5. Разностные сетки для невязкого (слева) и вязкого (справа) режимов течения (а), изолинии плотности (б), изолинии давления (в)